

Anticipation des mouvements de marchés

Peut-on anticiper des événements extrêmes sur les marchés ?

Adrien Genin

Adrien Genin a effectué son Master 2 Ingénierie Financière et Modèles Aléatoires à l'Université Paris 6. Au sein d'Opus Finance Research, il prépare sa thèse sur les différentes méthodes d'anticipations de la volatilité. Ses compétences mathématiques des processus stochastiques et de l'analyse numérique lui permettent de proposer des méthodes de valorisation et les indicateurs de risque innovants qui leur sont associés.

Depuis 2007, la crise financière l'a démontré à de nombreuses reprises : les impacts des brusques changements de régime sont très partiellement diffusés sur la nappe de volatilité, mettant en échec les modèles usuels, incapables d'anticiper les événements extrêmes. Pour y faire face, nous proposons ici une idée très pragmatique...

Est-il possible en intégrant l'information d'un choc brutal dans ces modèles de les rendre plus fiables ? Black et Litterman ont proposé une approche intéressante pour l'allocation d'actifs directement cotés sur le marché permettant d'associer la gestion quantitative et la gestion traditionnelle de portefeuille.

L'idée principale est de confronter les opinions du gestionnaire aux données pour créer une nouvelle prévision en accord avec les deux précédentes. L'objectif de nos travaux de recherche sur ce sujet est d'appliquer cette méthode aux produits dérivés et de l'insérer dans des modèles à volatilité stochastique, pour pallier leurs échecs dans les phases instables en y ajoutant de l'information. Le modèle présenté permet de créer un curseur entre un stress test et le modèle.

UNE MODÉLISATION DE LA NAPPE DE VOLATILITÉ

La nappe de volatilité implicite est un objet complexe et de grande dimension. Cependant, Fengler expose quelques propriétés remarquables et communes à de nombreux marchés :

- Le smile est d'autant plus prononcé que le temps restant jusqu'à la maturité est petit,
- Un minimum est atteint près de la monnaie,
- Le niveau de volatilité est plus élevé du côté put en dehors de la monnaie que du côté call en dehors de la monnaie,
- La volatilité de la volatilité implicite décroît avec le temps restant jusqu'à la maturité,
- Les rendements du sous-jacent et les rendements de la volatilité implicite sont corrélés négativement,
- Un choc sur un point de la nappe impacte tous les autres points de la nappe.

Un modèle acceptable doit être capable de rendre compte de ces propriétés. Le fait que les chocs se diffusent à travers toute la surface indique que la dynamique de la nappe de volatilité implicite peut être décomposée en un petit nombre de mouvements élémentaires. Dans son livre « *Semiparametric Modeling of Implied Volatility* », Fengler détermine les facteurs suffisants pour expliquer la majeure partie de la dynamique de la nappe en effectuant une analyse en composantes principales de la nappe de volatilité. Il montre qu'on peut conserver trois composantes principales permettant son interprétation en termes de mouvements : translations, rotations et déformations.

L'un des modèles à volatilité stochastique les plus utilisés, le modèle SABR (stochastic-$\alpha\beta\rho$) comporte 4 paramètres qui rendent compte indirectement des propriétés citées par Fengler. Le choix de SABR s'explique par sa simplicité et par l'existence de formules approchées pour la volatilité implicite. Dans sa version initiale, le modèle ne peut pas rendre compte de la nappe dans sa totalité car il n'intègre pas le temps jusqu'à la maturité : il modélise simplement le smile : $K \longmapsto \sigma_{implicite}(K)$.

Le modèle SABR dynamique permet de pallier cette lacune mais nous nous contentons ici de raisonner à maturité fixée. Le modèle SABR n'est pas plus robuste que les autres mo-



dèles stochastiques face à des mouvements extrêmes de la volatilité ou du sous-jacent, mais ayant des paramètres aisément calibrables, leur appliquer les lois de transformations définies avec le formalisme de Black Litterman permet d'imposer une vue sur la totalité de la nappe. Le choix s'est porté sur l'anticipation des mouvements de la nappe de volatilité mais nous aurions également pu choisir de l'appliquer aux courbes de taux, aux taux de change ou bien directement sur le sous-jacent : la couverture en delta est souvent mieux gérée que la couverture en vega.

VOUS AVEZ DIT VOLATILITÉ ? RAFRAÎCHISSONS-NOUS LA MÉMOIRE !

Suite à l'échec du modèle de Black-Scholes, de nombreux modèles ont été développés pour rendre compte des propriétés de la nappe de volatilité implicite. Les modèles à volatilité locale ont été introduits par Dupire en 1994, « *Pricing with a smile* », comme une généralisation du modèle de Black-Scholes.

La volatilité étant modélisée comme une fonction déterministe du prix du sous-jacent et du temps, ces modèles permettent de rendre compte du smile de volatilité implicite. De plus, en n'introduisant pas un deuxième facteur de risque, ils permettent de conserver la complétude du marché qui assure l'unicité des prix et la réplication des actifs contingents. Ces modèles sont calibrés avec les prix ou la nappe de volatilité implicite des options vanilles et utilisés notamment pour trouver les prix et les stratégies de couvertures des options exotiques.

Ils reposent sur le concept de volatilité locale, définie comme l'espérance sous la probabilité risque neutre de la variance instantanée sachant que le prix du sous-jacent est égal au strike de l'option à la maturité et toute l'information disponible à la date t.

$$\sigma^2_{K,T}\left(S_t,t\right)=\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\sigma^2\left(S_T,T,.\right)|S_T=K,F_t\right)$$

Elle peut donc s'interpréter comme le consensus de marché de la volatilité instantanée à la maturité et au strike de l'option considérée. La volatilité implicite s'interprète comme une estimation du marché de la volatilité moyenne durant la vie de l'option. La volatilité locale contient donc la prévision de la volatilité instantanée à la maturité alors que la volatilité implicite est une moyenne de la volatilité sur toute la durée de vie de l'option. Les modèles à volatilité stochastique modélisent la volatilité comme un processus de diffusion corrélé avec le processus du sous-jacent.

Ces modèles ne fournissent pas toujours des formules fermées pour les prix des options européennes et la calibration des paramètres peut nécessiter des algorithmes sophistiqués et difficiles à mettre en oeuvre d'un point de vue industriel.

RISQUER PLUS POUR GAGNER PLUS !

Markowitz (1959) a été le premier à quantifier le fait qu'un investisseur cherche à minimiser le risque pour un rendement fixé. Plus la volatilité d'un actif est élevée plus son prix sera susceptible d'avoir de grandes amplitudes et donc plus le risque de prix est élevé. Ainsi naquit l'étude de la volatilité et de sa dynamique. Black-Scholes et Merton publient en 1973 un article qui va révolutionner le monde de la finance quantitative.

La volatilité est supposée constante mais inconnue, il faut donc inverser la formule pour obtenir la volatilité nécessaire afin de disposer du prix de marché des options européennes. Cette volatilité est appelée « la volatilité implicite ». Cependant, l'observation de la volatilité implicite en fonction du prix d'exercice et du temps restant jusqu'à la maturité de l'option fait apparaître une nette courbure en prix d'exercice et en temps. La volatilité n'est donc pas constante.

Le modèle de Black-Scholes n'a pas été abandonné pour autant, au contraire, aujourd'hui de nombreux produits sont cotés en volatilité implicite. Une option étant un pari sur l'évolution future du sous-jacent, sa volatilité implicite est donc une grandeur qui mesure le futur, à l'inverse de la volatilité historique. La nappe de volatilité implicite contient donc non seulement l'information sur les prix mais aussi sur l'évolution future du sous-jacent. L'étude de sa dynamique est donc fondamentale.



LE MODÈLE SABR ET SES PRINCIPAUX RÉSULTATS MATHÉMATIQUES

Le modèle SABR est un modèle à deux facteurs décrivant de manière couplée le cours forward F_t et la volatilité α_t:

$$\begin{cases} dF_t &= \alpha_t F_t^{\beta} dW_t^1 \\ d\alpha_t &= \nu \alpha_t dW_t^2 \end{cases}$$

Le forward F_t suit un processus dont la loi est déterminée par le paramètre modèle β et la volatilité α_t suit un processus log-normal de volatilité υ, appelée volatilité de la volatilité. Ces deux processus sont corrélés via leurs mouvements browniens $\langle dW_t^1, dW_t^2 \rangle = \rho dt$. Les paramètres du modèle à calibrer sont donc $\alpha = \alpha_0$ (la volatilité initiale), β, ρ et υ.

Le coefficient β détermine la loi du forward : le cas $\beta = 1$ produit une loi log-normale et le cas $\beta = 0$ produit une loi normale. Contrairement aux autres paramètres, il n'est pas déterminé par l'algorithme de calibration mais par des considérations spécifiques au marché.

Hagan, Kumar, Lesniewski et Woodward dans l'article fondateur « *Managing Smile Risk* » trouvent une formule approchée pour la volatilité implicite.

$$\sigma_{implicite}\left(K,f\right) = \frac{\alpha}{(fK)^{\frac{1-\beta}{2}}\left\{1+\frac{(1-\beta)^2}{24}log^2\left(\frac{f}{K}\right)+\frac{(1-\beta)^4}{1920}log^4\left(\frac{f}{K}\right)\right\}}\left(\frac{z}{x(z)}\right)$$
$$\left\{1+\left[\frac{(1-\beta)^2}{24}\frac{\alpha^2}{(fK)^{1-\beta}}+\frac{1}{4}\frac{\alpha\beta\rho\nu}{(fK)^{\frac{1-\beta}{2}}}+\frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2\right]t_{ex}\right\}$$

Où :

$$z = \frac{\nu}{\alpha}(fK)^{\frac{1-\beta}{2}} log\left(\frac{f}{K}\right)$$

$$x(z) = log\left(\frac{\sqrt{1-2\rho z+z^2}+z-\rho}{1-\rho}\right)$$

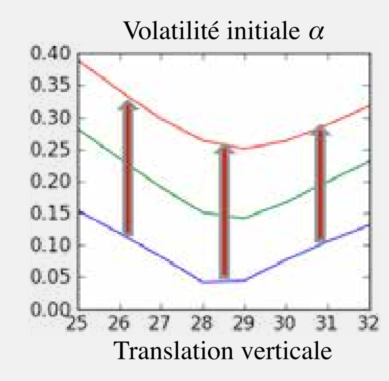
La volatilité à la monnaie est donnée par :

$$\sigma_{ATM} = \sigma_{implicite}\left(f,f\right) = \frac{\alpha}{f^{1-\beta}}\left\{1+\left[\frac{(1-\beta)^2}{24}\frac{\alpha^2}{f^{2(1-\beta)}}+\frac{1}{4}\frac{\alpha\beta\rho\nu}{f^{1-\beta}}+\frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2\right]t_{ex}\right\}$$

Le terme dominant de cette expression est $\frac{\alpha}{f^{1-\beta}}$. La dynamique du point à la monnaie (backbone) est donc essentiellement $\frac{\alpha}{f^{1-\beta}}$ et donc β peut aussi être déterminé par une étude du backbone. Regardons l'influence des paramètres sur le smile de volatilité.

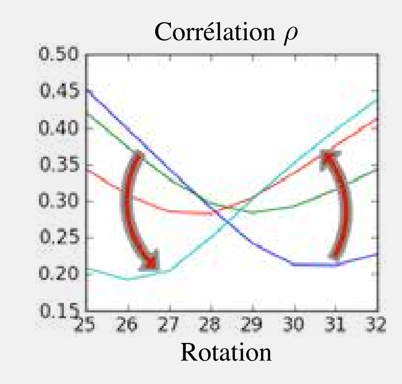
En faisant varier les paramètres un par un, tous les autres étant fixés, nous observons :

Volatilité initiale α



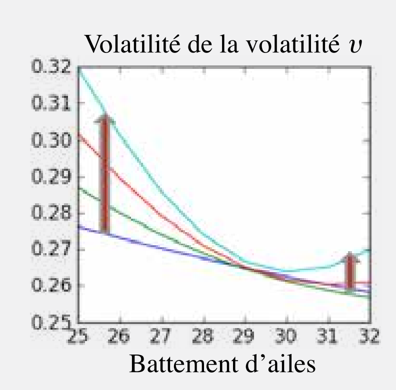
Translation verticale

Corrélation ρ



Rotation

Volatilité de la volatilité υ



Battement d'ailes



ANTICIPATION DE LA VOLATILITÉ IMPLICITE : MODE D'EMPLOI

Pour réaliser des anticipations sur la volatilité implicite, nous adaptons le modèle de Black-Litterman. Celui-ci est essentiellement basé sur le théorème de Bayes. Il quantifie l'impact de la réalisation d'un événement sur la probabilité qu'un autre événement se réalise. Fixons les idées : Si X une variable aléatoire de densité π et Y est une autre variable aléatoire dont on connaît $f(y|x)$ la densité conditionnellement à X, alors, la densité jointe de Y et X est donnée par $f(y,x) = \pi(x)f(y|x)$ et la densité marginale de Y se calcule simplement en intégrant la densité jointe sur toutes les valeurs possibles de X : $f(y) = \int \pi(x)f(y|x)dx$. La densité conditionnelle de X sachant Y est donnée par :

$$\pi(x|y) = \frac{\pi(x)f(y|x)}{f(y)} = \frac{\pi(x)f(y|x)}{\int \pi(x)f(y|x)}$$

C'est le théorème de Bayès dans sa version continue. Black et Litterman ont développé leur modèle pour la gestion de portefeuille composé uniquement d'actifs simples. Les anticipations se font alors sur les rendements des actifs. Les actifs suivent une loi gaussienne de moyenne μ et de variance-covariance Σ : $X \sim N(\mu, \Sigma)$. Les vues sont des combinaisons linéaires sur l'évolution des actifs, $V = PX$, sont exprimées sur les rendements des actifs et sont supposées encore gaussiennes : $P\mu \sim N(\upsilon,\Omega)$ où υ représente la valeur de la vue et Ω la confiance dans la vue. Alors $X|\upsilon;\Omega$ est encore gaussien de moyenne m et de matrice de variance-covariance σ avec :

$$m = \mu + \Sigma P' \left(P\Sigma P' + \Omega\right)^{-1} (v - P\mu)$$
$$\sigma = \Sigma - \Sigma P' \left(P\Sigma P' + \Omega\right)^{-1} P\Sigma$$

L'exemple « Zoom sur le modèle originel de Black-Litterman » illustre cette approche. En la modifiant pour postuler les anticipations non plus sur les rendements des actifs directement cotés sur le marché mais sur les mouvements de la nappe de volatilité implicite des options, nous sommes en mesure d'anticiper de fortes turbulences de la volatilité. Les indicateurs de risque qui en découlent intègrent alors ces évènements extrêmes et sont plus pertinents. Bien sûr cette approche pourra aussi s'appliquer au trading des options ou de la volatilité. Dans les cas d'applications qui nous intéressent, nous devons déterminer la distribution des paramètres du modèles SABR qui définissent le smile de volatilité implicite des vues sur le smile. Par analogie avec le modèle initial portant sur les cours :

- X représente le vecteur des paramètres du modèle SABR qui définissent le smile de volatilité implicite : $X = (\alpha, \beta, \rho, \nu)$.
- Y représente la vue de l'investisseur ou du gestionnaire de risque.

ZOOM SUR LE MODÈLE ORIGINEL DE BLACK LITTERMAN

Black et Litterman ont développé un modèle permettant d'associer la gestion traditionnelle et la gestion quantitative de portefeuille d'actifs directement cotés sur le marché. Le marché est modélisé par une variable aléatoire suivant une loi normale. Son espérance représente les rendements des actifs et la matrice de covariance leurs corrélations. Les opinions du gestionnaire sont exprimées sur les rendements. Ces opinions ou vues sont supposées suivre une loi normale dont l'espérance est la vue et la variance la confiance dans cette vue. Ce paramètre de confiance dans chaque vue permet de nuancer l'importance et donc l'influence de la vue par rapport au modèle initial. Dans un premier temps, il faut déterminer la loi des rendements étant donnée la vue, puis revenir au marché qui suit aussi une loi normale.

Nous présentons ici un exemple repris de l'article d'Attilio Meucci *« The Black-Litterman approach: Original Model and Extensions »* qui permet de fixer les idées sur les objectifs et l'intérêt de ce modèle. Un fonds d'investissement investit dans 6 indices nationaux : Italie, Espagne, Suisse, Canada, USA et Allemagne. La matrice de covariance des rendements journaliers de ces six indices est estimée à partir des volatilités σ = (21%; 24%; 24%; 25%; 29%; 31%) et de la matrice de corrélation :

$$\begin{pmatrix} 1 & 54\% & 62\% & 25\% & 41\% & 59\% \\ . & 1 & 69\% & 26\% & 36\% & 83\% \\ . & . & 1 & 15\% & 46\% & 65\% \\ . & . & . & 1 & 47\% & 39\% \\ . & . & . & . & 1 & 38\% \\ . & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

Le portefeuille est réparti de la façon suivante : $\tilde{w}$ = (4%; 4%; 5%; 8%; 17%; 8%)'. L'espérance des rendements du portefeuille est donnée par : π = (6%; 7%; 9%; 8%; 17%; 10%).

Supposons que l'investisseur ait deux vues :

- l'indice espagnol va augmenter de 12% sur l'année.
- la différence entre les rendements de l'indice US et allemand sera de -10%.

Il est possible de résumer ces vues dans un vecteur υ = (12%; -10%)' et une matrice de confiance dans les vues ici à 100% :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$



LA PREUVE DU CONCEPT AVEC UNE OPTION VANILLE

L'intérêt d'une telle méthode apparaît déjà sur une seule option vanille dans le cas du calcul de la VaR. Les paramètres d'intérêts qui pilotent le modèle SABR sont $X = (\alpha, \beta, \rho, \nu)$. La calibration donne une valeur à l'instant initial pour chaque paramètre, $X_0 = (\alpha_0, \beta_0, \rho_0, \nu_0)$. La calibration est répétée sur un historique de données d'un an, ce qui fournit une loi historique pour les paramètres. Les anticipations sont exprimées sur les paramètres. Le gestionnaire de risque donne les caractéristiques de ces anticipations :

$$\alpha \sim N(\mu_\alpha, \Sigma_\alpha)$$
$$\beta \sim N(\mu_\beta, \Sigma_\beta)$$
$$\rho \sim N(\mu_\rho, \Sigma_\rho)$$
$$\nu \sim N(\mu_\nu, \Sigma_\nu)$$

La loi a posteriori de chaque paramètre est calculée en confrontant la loi historique et l'anticipation grâce à la formule de Black-Litterman. Dans cet exemple, le portefeuille contient une seule option d'achat européenne.

L'algorithme se déroule de la façon suivante :

- chaque paramètre est tiré selon sa loi,
- calcul de la volatilité implicite avec la formule fermée obtenue par Hagan,
- la formule de Black-Scholes permet d'obtenir le prix des options européennes et de calculer les gains/pertes du portefeuille à l'horizon souhaité,
- les étapes précédentes sont répétées N fois avec N grand,
- La VaR Monte Carlo à $\alpha\%$ est la $\alpha \frac{N}{100}^{me}$ trajectoire la plus défavorable.

Il s'agit ici simplement de simulations trajectorielles pour un calcul de la VaR de type Monte Carlo mais cet exemple met en évidence la modification de la VaR quand les paramètres modèle sont modifiés. Nous avons vu que β n'entrait pas en jeu pour la calibration donc aucune anticipation n'est postulée sur β dans cet exemple. Les anticipations sur les trois autres paramètres sont des gaussiennes dont la moyenne et la variance ont été choisies arbitrairement mais de façon à obtenir un mouvement significatif. Par rapport au smile de volatilité obtenu par la calibration, le smile anticipé a subi les trois mouvements fondamentaux décrits plus haut : translation verticale, homothétie et rotation.

Le passé est résumé par les lois historiques sur les paramètres, déterminées par les différentes calibrations. Les distributions des paramètres anticipés sont des scénarios pour

LOIS HISTORIQUE, ANTICIPÉE ET A POSTERIORI SUR LES PARAMÈTRES DU MODÈLE SABR

Lois pour α.

Loi anticipée
Loi a posteriori
Loi historique

Lois pour ν

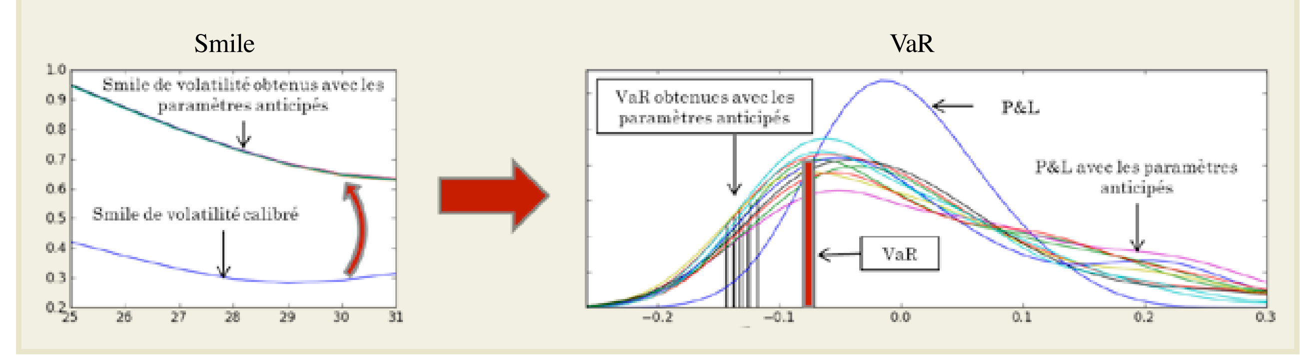
Loi a posteriori
Loi anticipée
Loi historique

Lois pour ρ

Loi a posteriori
Loi historique
Loi anticipée



MOUVEMENTS DU SMILE DE VOLATILITÉ IMPLICITE ET MODIFICATION DU P&L ET DE LA VAR DU CALL EUROPÉEN



le futur. En confrontant les lois historiques et les anticipations du gestionnaire, il est possible de créer un curseur entre la VaR, sans anticipation, et un stress test, sans historique, en fonction de la confiance accordée dans les anticipations.

CONCLUSION

L'anticipation à l'aide des paramètres d'un modèle n'est pas intuitive, il est très difficile de prédire a priori comment sera modifié le smile. Pour conserver l'aspect intuitif et humain de cette méthode, nous devons l'appliquer directement aux mouvements du smile, sur lesquels les gestionnaires de risque ont une expertise. Les résultats obtenus montrent bien qu'il est alors possible d'intégrer des anticipations sur d'importants mouvements du smile et de les prendre en compte pour le calcul d'indicateurs de risque tels que la VaR.

La force de cette approche réside dans la diversité de l'information qui peut être intégrée et nuancée grâce à un paramètre qui quantifie la confiance du gestionnaire dans chaque information. Les indicateurs qui en résultent seraient alors une sorte de curseur entre une situation normale et un stress test. Cette démarche généralisée à l'ensemble des indicateurs de risque donnerait un moyen d'ajouter des « anticipations » devant l'imminence d'un grand péril, alors que les outils statistiques usuels n'ont encore jamais repéré de tels cas. En période de crise, la mise à disposition de telles méthodes permettrait de mieux s'adapter à des situations encore « jamais vues ».

PERSPECTIVES

Pour avoir une application industrielle, il est nécessaire que ces méthodes s'adaptent à des portefeuilles avec un grand nombre de produits dérivés. L'obtention de formules fermées et l'utilisation de méthodes numériques efficaces sont donc un objectif de première importance.

Afin d'accroître la précision et la pertinence de nos résultats, nous nous intéressons à la géométrie différentielle, elle permet d'obtenir des formules fermées plus précises que celles obtenues par Hagan grâce aux méthodes de perturbations singulières et d'extrapoler ces résultats à des portefeuilles de grandes dimensions.

Dans le cas où la distribution historique des paramètres et des vues sont gaussiennes, Black et Litterman ont montré que la loi qui en résultait est encore gaussienne.

Cependant, la mise en œuvre de cette approche nécessite d'être précis sur les distributions historiques des paramètres pour les confronter aux vues du gestionnaire, il est donc nécessaire de s'extraire du cas gaussien.

